

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <http://www.ibo.org/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse <http://www.ibo.org/fr/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <http://www.ibo.org/es/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Matemáticas

Nivel superior

Prueba 1

Lunes 13 de mayo de 2019 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

En una progresión aritmética, la suma de los términos 3.º y 8.º es igual a 1.
Sabido que la suma de los siete primeros términos es 35, determine el primer término y la diferencia común.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



2. [Puntuación máxima: 6]

Tres puntos del espacio tridimensional tienen por coordenadas $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(3, 1, 0)$.

(a) Halle el vector

(i) \vec{AB} ;

(ii) \vec{AC} .

[2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el área del triángulo ABC .

[4]

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



16EP03

3. [Puntuación máxima: 5]

Considere la función $f(x) = x^4 - 6x^2 - 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

El gráfico de f se traslada dos unidades hacia la izquierda para dar lugar a la función $g(x)$.

Expresa $g(x)$ de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 5]

Utilizando la sustitución $u = \text{sen } x$, halle $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sqrt{\text{sen } x}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

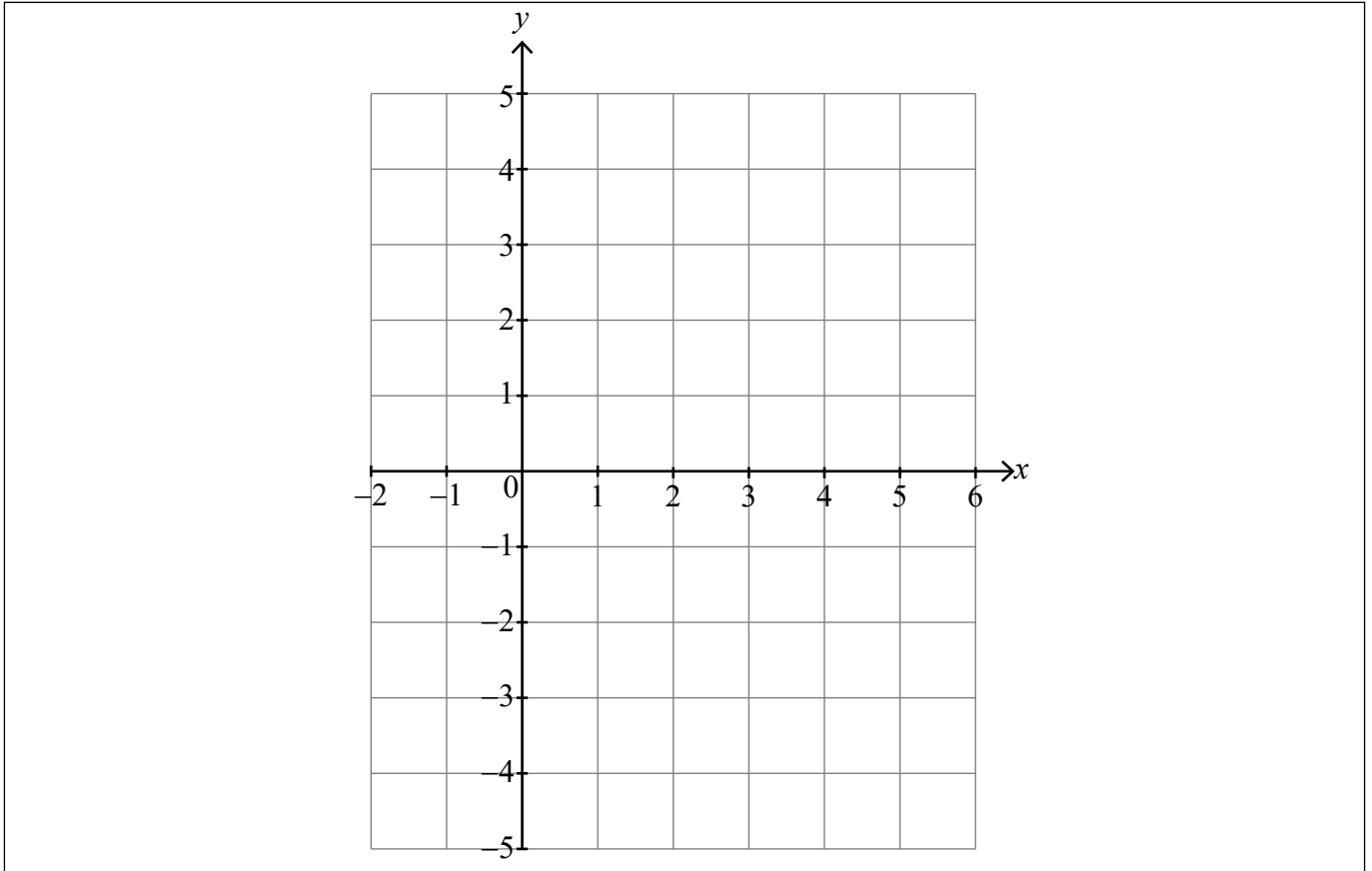


16EP05

Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 8]

- (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = \frac{x-4}{2x-5}$, e indique las ecuaciones de todas las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes. [5]



- (b) Considere la función $f : x \rightarrow \sqrt{\frac{x-4}{2x-5}}$.

Escriba

- (i) el mayor dominio posible de f ;
- (ii) el correspondiente recorrido de f .

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Puntuación máxima: 7]

La curva C viene dada por la ecuación $y = x \tan\left(\frac{\pi xy}{4}\right)$.

(a) Muestre que, en el punto $(1, 1)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2 + \pi}{2 - \pi}$. [5]

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación de la recta normal a C en el punto $(1, 1)$. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP07

Véase al dorso

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP08

7. [Puntuación máxima: 7]

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\log_2 6x = 1 + 2 \log_2 y$$
$$1 + \log_6 x = \log_6 (15y - 25).$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

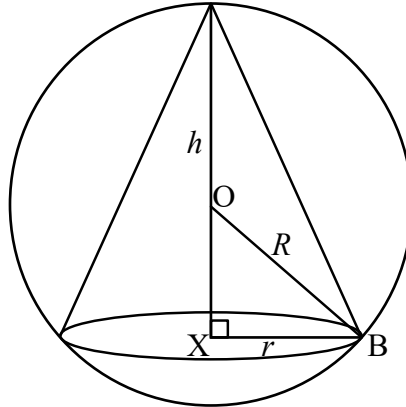


16EP09

Véase al dorso

8. [Puntuación máxima: 8]

Un cono circular recto de radio r está inscrito en una esfera de centro O y radio R , tal y como se muestra en la siguiente figura. La altura perpendicular del cono es h , X denota el centro de la base y B es un punto donde el cono toca la esfera.



(a) Muestre que el volumen del cono se puede expresar mediante $V = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3)$. [4]

(b) Sabiendo que existe un cono inscrito que tiene volumen máximo, muestre que el volumen de dicho cono es $\frac{32\pi R^3}{81}$. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



16EP10

(Pregunta 8: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP11

Véase al dorso

No escriba soluciones en esta página.

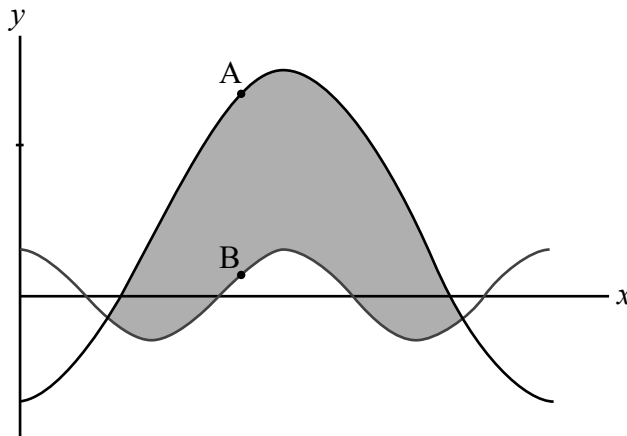
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 17]

Considere las funciones f y g definidas en el dominio $0 < x < 2\pi$ mediante $f(x) = 3 \cos 2x$ y $g(x) = 4 - 11 \cos x$.

La siguiente figura muestra el gráfico de $y = f(x)$ y el de $y = g(x)$.



- (a) Halle la coordenada x de cada uno de los puntos de intersección de los dos gráficos. [6]
- (b) Halle el área exacta de la región sombreada; dé la respuesta de la forma $p\pi + q\sqrt{3}$, donde $p, q \in \mathbb{Q}$. [5]

En los puntos A y B de la figura, los dos gráficos tienen la misma pendiente.

- (c) Determine la coordenada y de A, perteneciente al gráfico de g . [6]



No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 16]

La variable aleatoria X tiene función de densidad de probabilidad f , que viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} k(\pi - \arcsen x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}, \text{ donde } k \text{ es una constante positiva.}$$

(a) Indique la moda de X . [1]

(b) (i) Halle $\int \arcsen x \, dx$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $k = \frac{2}{2 + \pi}$. [6]

(c) Sabiendo que $y = \left(\frac{x^2}{2}\right) \arcsen x - \left(\frac{1}{4}\right) \arcsen x + \left(\frac{x}{4}\right) \sqrt{1 - x^2}$, muestre que

(i) $\frac{dy}{dx} = x \arcsen x$;

(ii) $E(X) = \frac{3\pi}{4(\pi + 2)}$. [9]

11. [Puntuación máxima: 17]

Considere las funciones f y g definidas mediante $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g(x) = \ln|x + k|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-k\}$, donde $k \in \mathbb{R}$, $k > 2$.

(a) Describa la transformación mediante la cual $f(x)$ se transforma en $g(x)$. [1]

(b) Indique el recorrido de g . [1]

(c) En un mismo sistema de ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, indicando claramente todos los puntos de corte con los ejes. [6]

Los gráficos de f y g se cortan en el punto P.

(d) Halle las coordenadas de P. [2]

La tangente a $y = f(x)$ en P pasa por el origen $(0, 0)$.

(e) Determine el valor de k . [7]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP14

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP15

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16